数理解析研究所講究録
1525巻 2006年 5-14

モデル理論のランダムグラフへの応用

池田宏一郎 (Koichiro IKEDA) *
法政大学経営学部
(Faculty of Business Administration, Hosei University)

Shelah-Spencer [7] は, $\alpha\in(0,1)$ が無理数のときランダムグラフ $G(n,n^{-\alpha})$ においてZero-One Lawが成り立つことを証明した. その後, Baldwin-Shelah [1] はこの定理のモデル論的な別証明を与えた. ここでは, Baldwin-Shelahの証明をより単純化しつつ, α が必ずしも無理数でない場合においてZero-One Lawがどのように一般化されるかを述べる.

1 ランダムグラフ

ここで扱うグラフは, 対称的かつ非反射的な2項関係 $R(*,*)$ をもつ構造とする. 有限グラフ A に対して, その頂点の数と辺の数をそれぞれ $v(A), e(A)$ で表すことにする. また有限グラフ A,B に対して, $v(B/A)=v(B\cup A)-v(A)$, $e(B/A)=e(B\cup A)-e(A)$ と書くことにする.

まず, 2つの頂点が辺で結ばれている確率を表す"辺確率" $p=p(n)$ が与えられたとき, 辺確率 p によって決まるグラフの確率および論理式の確率を次のように定義する.

定義 $0<p=p(n)<1$ (n は自然数) とする.
(i) $v(A)=n$ である有限グラフ A の確率を

$$P^p(A)=p^{e(A)}(1-p)^{\binom{n}{2}-e(A)}$$

と定義する.
(ii) $I=\{1,2,...,n\}$ に固定したとき, I 上のグラフ全体を根元事象としても

*Research partially supported by Grants-in-Aid for Scientific Research (no.16540123), Ministry of Education, Science and Culture.

つ有限確率空間 $G(n,p)$ を辺確率 p をもつ I 上のランダムグラフという.
(iii) $I=\{1,2,...,n\}$ 上のランダムグラフ $G(n,p)$ における1階閉論理式 σ の確率を

$$P_n^p(\sigma)=\sum\{P^p(A):A=(I,R^A)\models\sigma\}$$

と定義する.

定義 ランダムグラフ $G(n,p)$ において Zero-One Law が成り立つとは, 任意の1階閉論理式 σ に対して

$$\lim_{n\to\infty}P_n^p(\sigma)=0 \text{ or } 1$$

をみたすことである.

以下の事実は後で証明を与える.

事実 1 (i) p が定数のとき Zero-One Law が成り立つ. (Fagin [2])
(ii) $p=n^{-\alpha}$ かつ $\alpha\in(0,1)$ が無理数のとき Zero-One Law が成り立つ. (Shelah-Spencer [7], Baldwin-Shelah [1])

注意 2 $p=n^{-\alpha}$ において α が有理数のときは Zero-One Law が成り立たないことが知られている：ランダムグラフ $G(n,p)$ において $\lim_{n\to\infty}P_n^p(\sigma)$ が存在するとき, $G(n,p)$ は Convergence Law をみたすという. $\alpha=1$ のとき, Zero-One Law は成り立たないが Convergence Law は成り立つことが知られている (Lynch [6]). 一方, $\alpha\in(0,1)$ が有理数のときは Convergence Law さえも成り立たない (Shelah-Spencer [7]).

2 Generic グラフ

定義 $\alpha\in[0,1)$ を実数, A,B を有限グラフとする. このとき
(i) $\delta_\alpha(A):=v(A)-\alpha e(A)$, $\delta(B/A):=\delta(B\cup A)-\delta(A)$;
(ii) A が closed in B（記号で $A\leq_\alpha B$）とは, 任意の $X\subset B-A$ に対して $\delta_\alpha(X/A)\geq 0$ であることと定義する. M が無限グラフのとき, 任意の有限な $X\subset M$ に対して $A\leq_\alpha AX$ ならば $A\leq_\alpha M$ と書く. なお, α があきらかな場合は $\delta_\alpha(*),*\leq_\alpha *$ はそれぞれ $\delta(*),*\leq *$ で略記する.
(iiv) $\mathbf{K}_\alpha:=\{\mathrm{A}:\delta(\mathrm{B})\geq 0 \text{ for any } \mathrm{B}\subset\mathrm{A}\}$.

注意 3　$\alpha = 0$ のとき，$\mathbf{K}_\alpha$ は「すべての有限グラフのクラス」となり，$* \leq_\alpha *$ は包含関係 $* \subset *$ となる.

定義　$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\alpha$ とする．このとき可算グラフ M が $\mathbf{K}$-generic グラフであるとは，
(1) $A \subset_\omega M$ ならば $A \in \mathbf{K}$;
(2) $A \leq B \in \mathbf{K}, \mathrm{A} \leq \mathrm{M}$ ならば $B' \leq M$ をみたす A 上の B のコピー B' が存在する.

定義　$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\alpha$ とする．このとき
(i) $\mathbf{K}$ が融合性をもつとは，$A \leq B \in \mathbf{K}, \mathrm{A} \leq \mathrm{C} \in \mathbf{K}$ ならば，ある $D \in \mathbf{K}$ が存在して $B' \leq D, C' \leq D$．ただし $B' \cong_A B, C' \cong_A C$.
(ii) $\mathbf{K}$ が自由融合性をもつとは，$A \leq B \in \mathbf{K}, \mathrm{A} \leq \mathrm{C} \in \mathbf{K}$ ならば，ある $B' \cong_A B$ と $C' \cong_A C$ が存在して $B' \oplus_A C' \in \mathbf{K}$．（ここで $B' \oplus_A C'$ は，頂点集合が $B' \cup C'$ でありかつ $B' \cap C' = A$ をみたし，辺集合が $R^{B' \cup C'} = R^{B'} \cup R^{C'}$ であるグラフ.）

注意 4　$\mathbf{K}_\alpha$ は融合性をもち，部分構造に関して閉じている.

補題 5　$\mathbf{K} \subset \mathbf{K}_\alpha$ を融合性をもち，部分構造に関して閉じているクラスとする．このとき
(i) $\mathbf{K}$-generic グラフは存在する.
(ii) α が有理数ならば $\mathbf{K}$-generic グラフは同型を除いてひとつ.

証明　(i) $A \leq B \in \mathbf{K}$ となるような対 (A, B) 達を並べたものを $\{(A_i, B_i)\}_{i<\omega}$ とする．融合性より，次のような有限グラフの列 $\{D_i\}_{i<\omega}$ が構成できる：(1) $D_0 \leq D_1 \leq D_2 \leq \cdots$; (2) 各自然数 $j \leq i$ に対して，$A \leq D_j$ となる $A \cong D_j$ が存在するならば，$AB \cong A_j B_j$ となる $B \leq D_{i+1}$ が存在する．このとき $M = \bigcup_{i<\omega} D_i$ が $\mathbf{K}$-generic になるのは作り方よりあきらか.
(ii)α が有理数のとき，任意の generic グラフ M と有限な $A \subset M$ に対して $A \subset B \leq M$ をみたす有限グラフ B が存在することがいえる．よって，Back-and-Forth を用いて 2 つの generic グラフが同型になることが示せる.

3　Fagin の結果

有限グラフ A に対して，$X \cong A$ を表す論理式を $\psi_A(X)$ と書くことにする.

約束　すべての有限グラフのクラスを $\mathbf{K}_0$ とし, $\mathbf{K}_0$-generic グラフ M の理論を T_0 とする. $S_0 = \{\forall X(\psi_A(X) \to \exists y \psi_{Ab}(Xy)) : A \subset Ab \in \mathbf{K}_0\}$ とする. M は S_0 のモデルとなっているので S_0 は無矛盾であることに注意. 辺確率 $p=$ 定数であるランダムグラフ $G(n,p)$ において, $T^0 = \{\sigma : \lim_{n\to 0} P_n^p(\sigma) = 1\}$ とする

補題 6　$S_0 \vdash T_0$.

証明　M を $\mathbf{K}_0$-generic グラフ, N を S_0 のモデルとする. 可算な $N_0 \prec N$ を取ると, 補題 5 より $N_0 \cong M$ であるので $N \equiv M$. よって $S_0 \vdash T_0$.

補題 7　任意の $\phi \in S_0$ に対して, $\lim_{n\to\infty} P_n^p(\phi) = 1$.

証明　$\phi = \forall X(\psi_A(X) \to \exists y \psi_{Ab}(Xy))$ とする. $v(A) = m, e(b/A) = l$ とする. このとき $P_n^p(\neg\phi) \le (n)_m (1 - p^l q^{m-l})^{n-m} \to 0$. よって $\lim_{n\to\infty} P_n^p(\phi) = 1$.

定理 8　$T_0 = T^0$.

証明　定義より T^0 が無矛盾であることはあきらか. よって $T_0 \subset T^0$ を示せばよい. $\sigma \in T_0$ とする. 補題6よりある $\phi_1, ..., \phi_n \in S_0$ が存在して $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \vdash \sigma$. よって $P(\sigma) \ge P(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \ge P(\phi_1) + ... + P(\phi_n) - (n-1) \to 1$. 従って $\sigma \in T^0$.

系 9 (Fagin [2])　辺確率 p が定数のとき Zero-One Law が成り立つ.

4　T_α の公理化

約束　各実数 $\alpha \in (0,1)$ に対して, $\mathbf{K}_\alpha$-generic グラフの理論を T_α と書く. さらに, 次の閉論理式の集合を S_α と書く：(1) $\neg\exists X \psi_A(X)$ ($A \notin \mathbf{K}_\alpha$)；(2) $\forall X(\psi_A(X) \to \exists Y \psi_{AB}(XY))$ ($A \le B \in \mathbf{K}_\alpha$). ここで, $\mathbf{K}_\alpha$-generic グラフは S_α のモデルになっているので S_α は無矛盾であることに注意する. 辺確率 $p = n^\alpha$ のランダムグラフ $G(n, n^{-\alpha})$ において, $T^\alpha = \{\sigma : \lim_{n\to 0} P_n^p(\sigma) = 1\}$ とする.

定理 10(Ikeda-Kikyo-Tsuboi [4])　各実数 $\alpha \in (0,1)$ に対して $S_\alpha \vdash T_\alpha$. よって T_α は Π_2-公理化可能.

注意 11　Baldwin-Shelah は $\alpha \in (0,1)$ が無理数のときに T_α が Π_3-公理化可能であることを示している [1]. さらに Laskowski は $\alpha \in (0,1)$ が無理数のときに T_α が Π_2-公理化可能であることを示している [5]. 上の定理はこれらの結果の拡張になっている.

以下，この定理の証明を α が有理数の場合と無理数の場合に分けてみていく.

4.1　α が有理数のとき

定義　有限グラフ A が極小であるとは，サイズが 2 以上の任意の真部分集合 $X \subset A$ に対して $\delta(X) > \delta(A)$ となることである.

補題 12　$\alpha \in (0,1)$ を有理数とする. このとき，
(i) $\delta(D) = 1$ となる極小グラフ D が存在する；
(ii) $\alpha = u/t$ とするとき，$\delta(E) = 1 - 1/t$ となる極小グラフ E が存在する. ここで u, t は互いに素な自然数.

証明　(i) 次の 2 つの場合に分けて考える.
場合 1 ：$1/2 < \alpha < 1$ のとき. 2 つの頂点と 1 つの辺からなるグラフ A は $\delta(A) = 2-\alpha$ なる極小グラフ. ここで $0 < \delta(A)-1 < 1/2$ に注意. $n = \inf\{k : k - k\alpha \geq 1\}$ とし，A の n 個のコピーを 1 点を共有するように輪状に貼り合わせたグラフを B とすると B は $\delta(B) = n - n\alpha$ の極小グラフとなる. ここで，$n - n\alpha = 1$ のときは B が $\delta(B) = 1$ の極小グラフとなりおしまい. $n - n\alpha > 1$ のときは $0 < \delta(B) - 1 < 1/2$ となるので，B を部品として上と同様の操作を行えば，α が有理数であることよりいつかは $\delta(D) = 1$ の極小グラフ D が得られる.
場合 2 ：$0 < \alpha \leq 1/2$ のとき. $n = \sup\{k : \delta(K_k) \geq 1\}$ とする. $\delta(K_n) = 1$ であれば K_n が求める極小グラフ. そうでない場合，K_n から辺を一本ずつ取り除いていくと，いつかは $0 < \delta(A) - 1 < 1/2$ をみたす極小グラフ A が存在する. この A を部品として場合 1 と同様の操作を行えば $\delta(D) = 1$ なる極小グラフ D が得られる.
(ii) (i) の証明とほぼ同様に，$0 < \alpha \leq (1-t)/2t$ の場合と $(1-t)/2t < \alpha < 1$ の場合の 2 つの場合に分けてかんがえればよい.

定義　有限グラフの対 (B, A) が $\mathbf{K}_\alpha$-極小対であるとは，
(i) $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$;
(ii) $A \subset C \leq B$ ならば $C = A$ あるいは $C = B$.

補題 13　$\alpha \in (0,1)$ が有理数のとき $\mathbf{K}_\alpha$ は次の性質をみたす：

> (*) 任意の $\mathbf{K}_\alpha$-極小対 (B, A) と自然数 n に対して $A \leq C, \delta(C/A) = 0, B \leq_n C$ をみたす $C \in \mathbf{K}_\alpha$ が存在.

証明　$\mathbf{K}_\alpha$-極小対 (B, A) と自然数 n を固定する. $\delta(B/A) = 0$ のときは $C = B$ とすればよいので $\delta(B/A) > 0$ と仮定してよい. また (B, A) は極小対なので $\delta(B/A) \leq 1$. よって $\alpha = u/t$ (u, t は互いに素な自然数) とすると, $\delta(B/A) = k/t$ (k は $0 < k \leq t$ なる自然数) となる. いま補題 12 より $\delta(D) = 1$ なる極小グラフ D と $\delta(E) = 1 - 1/t$ なる極小グラフ E が存在する. このとき

$$C = B \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_n \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

とする. ただしここで, D_i, E_j はそれぞれ D, E のコピー, そして $X \oplus Y$ は 1 点のみを共有する自由融合, を意味する. まず初めに $\delta(C/A) = 0$ を示す. (証明: $\delta(C/A) = \delta(B/A) + \delta(D_1 ... D_n/B) + \delta(E_1 ... E_k/D_n) = k/2 + 0 + (-k/2) = 0$.) 次に $B \leq_n C$ を示す. (証明: サイズが高々 n の $X \subset C - B$ を取る. $B - C \not\subset X$ であるので, $D_1, ..., D_n, E_1, ..., E_k$ と X との共通部分はどれかが欠けている. よって D, E の極小性より $\delta(X/B) \geq 0$.) 最後に $A \leq C \in \mathbf{K}_\alpha$ を示す. (証明: $\mathbf{K}_\alpha$ の融合性より $C \in \mathbf{K}_\alpha$ はあきらか. また (B, A) が極小対であることより $A \leq C$ も導かれる.)

補題 14　$\alpha \in (0,1)$ が有理数のとき $S_\alpha \vdash T_\alpha$.

証明　N を $\aleph_0$-saturated な S_α のモデルとする. 補題 5 より N が generic であることを示せば十分. $A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha, \mathrm{A} \leq \mathrm{N}$ とする. $A = B_0 \leq B_1 \leq ... \leq B_k = B$ を長さが極大の closed tower とする. 補題 13 より, 任意の自然数 n に対して $A \leq C, \delta(C/A) = 0, B_1 \leq_n C$ をみたす $C \in \mathbf{K}_\alpha$ が存在する. よって $S_\alpha(1)$ より, C は A 上 N の中に埋め込めるが, $\delta(C/A) = 0$ であるので $C \leq N$ と思ってよい. さらに $B_1 \leq_n C$ より $B_1 \leq_n N$ も成り立っている. よって論理式の集合 $\{X_1 \leq_n N : X \cong_A B_1, n \in \omega\}$ は無矛盾であるので, N の saturation より $B_1' \leq N$ なる B_1 の A 上のコピー B_1' が存在する. この操作を $B_2, ..., B_k$ まで続けていけば B が A 上 closed に埋め込むことができる.

4.2　α が無理数のとき

補題 15　$\alpha \in (0,1)$ を無理数とする. ϵ を任意の正の実数とする. このとき
(i) $0 < \delta(D) - 1 < \epsilon$ をみたす極小グラフ D が存在する.
(ii) $-\epsilon < \delta(E) - 1 < 0$ をみたす極小グラフ E が存在する.

証明　補題12の証明とほぼ同様.

補題16　$\alpha \in (0,1)$ が無理数のとき $\mathbf{K}_\alpha$ は次の性質をみたす：

(**) 任意の $\mathbf{K}_\alpha$-極小対 (B, A) と自然数 n と正の実数 ϵ に対して $A \leq C, \delta(C/A) < \epsilon, B \leq_n C$ をみたす $C \in \mathbf{K}_\alpha$ が存在.

証明　極小対 (B, A) と自然数 n と正の実数 ϵ を固定する．(B, A) が極小対であることから $\delta(B/A) \leq 1$ である．$\epsilon_1 = (1 + \epsilon - \delta(B/A))/n$ とする．補題15より，$0 < \delta(D) - 1 < \epsilon_1$ をみたす極小グラフ D が存在する．正の実数 $\epsilon_2 < \epsilon$ を選ぶ．再び補題15より $-\epsilon_2 < \delta(E) - 1 < 0$ をみたす極小グラフ E が存在する．このとき

$$0 < \delta(B/A) + n(\delta(D) - 1) + k(\delta(E) - 1) < \epsilon$$

をみたす自然数 k が存在する．いま

$$C = B \oplus D_1 \oplus \cdots \oplus D_n \oplus E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$$

とする．ただしここで，D_i, E_j はそれぞれ D, E のコピーとする．まず $\delta(C/A) < \epsilon$ を示す．実際，$\delta(C/A) = \delta(B/A) + \delta(D_1 \ldots D_n/B) + \delta(E_1 \ldots E_k/D_n) = \delta(B/A) + n(\delta(D) - 1) + k(\delta(E) - 1) < \epsilon$. $B \leq_n C$ および $A \leq C \in \mathbf{K}_\alpha$ の証明は補題13とほぼ同様なので省略する.（ただし，$\delta(E_1 \oplus \cdots \oplus E_k) = 1 + k(\delta(E) - 1) > 1 - k\epsilon_2 > 0$ に注意.）

補題17　$\alpha \in (0,1)$ が無理数のとき $S_\alpha \vdash T_\alpha$.

証明　まず次の主張を示す.
主張：N を S_α の $\aleph_1$-saturated モデルとするとき，$A \leq B \in \overline{\mathbf{K}}_\alpha, |A| = \aleph_0, |B - A| < \aleph_0, A \leq N$ ならば $B' \leq N$ なる B の A 上のコピー B' が存在する.
証明：$B^* = B - A$ とする．B を A 上の closed tower $A = B_0 \leq B_1 \leq \cdots \leq B_m = B$ に長さが極大になるように分解する．$B = B_1$ であると仮定すると，(B, A) は極小対と思ってよい．A の有限部分集合の上昇列 A_n を
(i) $A = \bigcup_{n<\omega} A$,
(ii) $\inf\{\delta(X/A_n) : X \subset_\omega A\} \geq -1/n$,
をみたすように取る．自然数 n を固定する．さらに $\epsilon = \inf\{\delta(X/A_n B^*) : |X| \leq n, A_n B^* \leq X A_n B^* \in \mathbf{K}_\alpha\}$ とする．性質 (**) より，$A_n \leq C, \delta(C/A_n) < \epsilon - 1/n, A_n B^* \leq_n C$ をみたす $C \in \mathbf{K}_\alpha$ が存在する．$S_\alpha(2)$ より，C は A_n

上 N の中に埋め込まれていると思ってよい．このとき $A_nB^* \leq_n N$ が成り立っている．(証明：$X \subset N - A_nB^*$ をサイズが高々 n の部分集合とする．$X_C = X \cap C, X_N = X - C$ とする．このとき $\delta(X/A_nB^*) = \delta(X_C/A_nB^*) + \delta(X_N/A_nB^*X_C) \geq \delta(X_C/A_nB^*) + \delta(X_N/C) \geq \epsilon - (\epsilon - 1/n)$.) よって論理式の集合 $\{A_nX \leq_n N : X \cong_{A_n} B, n \in \omega\}$ は無矛盾であるので，N の saturation より $B' \leq N$ なる B の A 上のコピー B' が存在する．また $B_1 \neq B$ のときも，$B_1, B_2, \ldots$ をひとつずつ N の中に折りたたんでいけば最終的に B を closed に埋め込むことができる．

M, N を S_α の $\aleph_1$-saturated なモデルとするとき，上の主張より Back-and-Forth を用いて $M_1 \cong N_1, M_1 \prec M, N_1 \prec N$ をみたす M_1, N_1 を作ることができる．よって $M \equiv N$ となるので $S_\alpha \vdash T_\alpha$.

5 Shelah-Spencer の結果の一般化

実数 $\alpha \in (0,1)$ を固定する．辺確率が $p = n^{-\alpha}$ のとき，確率 $P_n^p(*)$ を $P_n^\alpha(*)$ と略記する．

補題 18 任意の $\phi \in S_\alpha$ に対して次をみたす無理数 $\beta \in (0, \alpha]$ が存在する：任意の無理数 $\beta' \in [\beta, \alpha]$ に対して $\lim_{n\to\infty} P_n^{\beta'}(\phi) = 1$.

証明 ふたつの場合に分けて考える．
場合 1：$\phi = \neg\exists X \psi_A(X)$ （$A \notin \mathbf{K}_\alpha$）のとき．$\delta(A) = k - l\alpha < 0$ と仮定して構わない．このとき $k - l\beta < 0$ をみたす無理数 $\beta \in (0, \alpha]$ が存在．無理数 $\beta' \in [\beta, \alpha]$ を固定する．このとき

$$P_n^{\beta'}(\neg\phi) \leq (n)_k p^l q^{\binom{k}{2}-l} \leq n^{k-l\beta'} \to 0.$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} P_n^{\beta'}(\phi) = 1$.
場合 2：$\phi = \forall X(\psi_A(X) \to \exists Y \psi_{AB}(XY))$ （$A \leq B \in \mathbf{K}_\alpha$）のとき．$v(A) = m, v(B/A) = k, e(B/A) = l$ とする．無理数 $\beta \leq \beta' \leq \alpha$ を固定する．$\delta(B/A) > 0$ より $k - l\beta' > 0$ に注意．このとき

$$P_n^{\beta'}(\neg\phi) \leq (n)_m (1 - p^l q^{\binom{m+k}{2} - \binom{m}{2} - l})^{\binom{n-m}{k}} = O(n^m e^{-n^{k-l\beta'}}) = o(1).$$

ゆえに $\lim_{n\to\infty} P_n^{\beta'}(\phi) = 1$.

定義 $T^{\leq\alpha}$ を次の条件をみたす 1 階閉論理式 σ の集合とする：ある無理数 $\beta \leq \alpha$ が存在して，任意の無理数 $\beta' \in [\beta, \alpha]$ に対して $\lim_{n\to\infty} P_n^{\beta'}(\sigma) = 1$.

定理 19([3]) (i) 任意の実数 $\alpha \in (0,1)$ に対して, $T_\alpha = T^{\leq\alpha}$.
(ii) 任意の無理数 $\alpha \in (0,1)$ に対して, $T^\alpha = T^{\leq\alpha}$.

証明 (i) 定義より $T^{\leq\alpha}$ が無矛盾であることはあきらか. よって T_α が完全であることより $T_\alpha \subset T^{\leq\alpha}$ を示せばよい. 任意の $\sigma \in T_\alpha$ を取る. 定理 10 より, $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \vdash \sigma$ をみたす $\phi_1, ..., \phi_n \in S_\alpha$ が存在する. 補題 18 より, 各 ϕ_i に対してある無理数 $\beta_i \leq \alpha$ が存在して任意の $\beta' \in [\beta_i, \alpha]$ に対して $\lim_{n\to\infty} P_n^{\beta'}(\phi) = 1$. $\beta = \max\{\beta_1, ..., \beta_n\}$ とする. 任意の無理数 $\beta' \in [\beta, \alpha]$ を取る. このとき

$$P_n^{\beta'}(\sigma) \geq P_n^{\beta'}(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \geq P_n^{\beta'}(\phi_1) + ... + P_n^{\beta'}(\phi_n) - (n-1) \to= 1.$$

ゆえに $\sigma \in T^{\leq\alpha}$.
(ii) α を無理数とする. $T^\alpha \subset T^{\leq\alpha}$ を示せば十分. 任意に $\sigma \notin T^{\leq\alpha}$ を取る. (i) より $\neg\sigma \in T^{\leq\alpha}$ であるので, 定理 10 より $\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n \vdash \neg\sigma$ をみたす $\phi_1, ..., \phi_n \in S$ が存在する. このとき (i) と同様に

$$P_n^\alpha(\neg\sigma) \geq P_n^\alpha(\phi_1 \wedge ... \wedge \phi_n) \to 1.$$

ゆえに $\sigma \notin T^\alpha$.

系 20 (Shelah-Spencer [7], Baldwin-Shelah [1]) 辺確率 $p = n^{-\alpha}$ において $\alpha \in (0,1)$ が無理数のとき Zero-One Law が成り立つ.

参考文献

1 J. Baldwin and S. Shelah, Randomness and semigenericity, Transactions of the American Mathematical Society, 349, 1359–1376, 1997.

1. R. Fagin, Probabilities in finite models, Journal of Symbolic Logic, 41, 50–58, 1976

2. K. Ikeda, A note on sparse random graphs, a short note, 2006

3. K. Ikeda, H. Kikyo and A. Tsuboi, On generic structures with a strong amalgamation property, preprint, 2006.

4. M. C. Laskowski, A simpler axiomatization of the Shelah-Spencer almost sure theories, to appear in Israel Journal of Mathematics

5. J. Lynch, Properties of sentences about very sparse random graphs, Random Structures and Algorithms, 3, 33–54, 1992

6. S. Shelah and J. Spencer, Zero-one laws for sparse random graphs, Journal of American Mathematical Society, 1, 97–115, 1988